

## Teoremi Gauss e Stokes / Alcuni esercizi svolti <sup>(1)</sup>

**ESERCIZIO.** Usando il teorema di Stokes, calcolare il flusso del rotore del campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (-x^2y, x^3 + z^2, \arctan e^{x+y+z})$$

attraverso la superficie

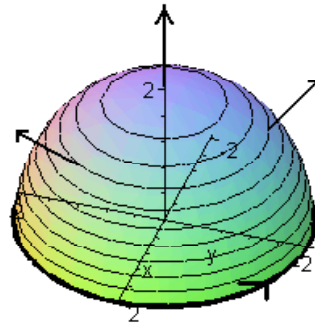
$$\Sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

orientata secondo i versori uscenti dall'origine.

**Svolgimento.** Il teorema di Stokes assicura che il flusso  $\Phi_\Sigma(\text{rot } \mathbf{F})$  del rotore di  $\mathbf{F}$  attraverso la calotta orientata  $\Sigma$  coincide con il lavoro del campo  $\mathbf{F}$  lungo il bordo  $\Gamma(\Sigma)$  di  $\Sigma$  orientato coerentemente con  $\Sigma$  (cioè secondo il verso di un osservatore che, disposto come il campo normale che orienta  $\Sigma$ , percorre  $\Gamma(\Sigma)$  vedendo  $\Sigma$  alla sua sinistra).

La superficie  $\Sigma$  è la semisfera di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel semispazio  $z \geq 0$  e dunque il suo bordo  $\Gamma = \Gamma(\Sigma)$  è la circonferenza del piano  $xy$  di centro l'origine e raggio 2, che ammette la rappresentazione parametrica

$$\Gamma : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



Tale rappresentazione risulta coerente con l'orientamento di  $\Sigma$ , in quanto, al crescere di  $t$ , il punto  $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$  si muove lungo  $\Gamma$  come in figura. Dunque, poiché

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\gamma(t)) &= \mathbf{F}(2 \cos t, 2 \sin t, 0) = (-8 \cos^2 t \sin t, 8 \cos^3 t, \arctan e^{2 \cos t + 2 \sin t}), \\ \gamma'(t) &= (-2 \sin t, 2 \cos t, 0), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\text{rot } \mathbf{F}) &= \int_\Gamma \mathbf{F} \cdot dP = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (16 \cos^2 t \sin^2 t + 16 \cos^4 t) dt \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 16 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 16 \left[ \frac{t + \cos t \sin t}{2} \right]_0^{2\pi} = 16\pi. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Altri esercizi svolti sugli integrali superficiali e sui teoremi di Gauss e Stokes si possono trovare all'indirizzo: [http://cantor.polito.it/didattica/index2.php?percorso=Analisi matematica 2/Calcolo integrale](http://cantor.polito.it/didattica/index2.php?percorso=Analisi%20matematica%20Calcolo%20integrale)

**ESERCIZIO.** Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin(x^2 + z) - 2yz, 2xz + \sin(y^2 + z), \sin(x^2 + y^2))$$

lungo la circonferenza

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

percorsa in modo che la proiezione sul piano  $xy$  giri in senso orario (rispetto ad un osservatore disposto come l'asse  $z$ ).

**Svolgimento.** Vista l'espressione del campo, il calcolo diretto del lavoro richiesto non pare agevole. D'altra parte, risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin(x^2 + z) - 2yz & 2xz + \sin(y^2 + z) & \sin(x^2 + y^2) \end{vmatrix} \\ &= (2y \cos(x^2 + y^2) - 2x + \cos(y^2 + z), \cos(x^2 + z) - 2y - 2x \cos(x^2 + y^2), 4z) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

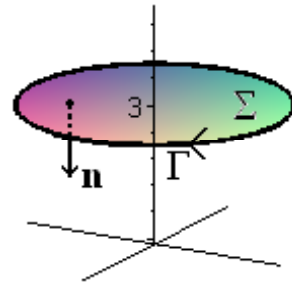
e quindi il campo  $\mathbf{F}$  non è conservativo in alcun aperto contenente  $\Gamma$  (in quanto non è irrotazionale), per cui non si può applicare il teorema di equivalenza per dedurre che il lavoro richiesto è nullo. Ricorriamo allora al teorema di Stokes, che è applicabile in quanto  $\mathbf{F}$  è di classe  $C^1$  su  $\mathbb{R}^3$  (addirittura di classe  $C^\infty$ ) e la circonferenza

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

è il bordo della calotta regolare

$$\Sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

(cerchio del piano  $z = 3$  con raggio 1 e centro in  $(0, 0, 3)$ ).



Dunque si ha

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma,$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale a  $\Sigma$  coerente con l'orientamento scelto su  $\Gamma$ , ossia tale che un osservatore disposto su  $\Sigma$  come  $\mathbf{n}$  che percorra  $\Gamma$  nel verso stabilito lasci  $\Sigma$  alla sua sinistra, ossia  $\mathbf{n} = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$ . Sfruttando il calcolo già effettuato di  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ , si ottiene subito  $\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -4z$  e pertanto si conclude

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot dP = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -4 \int_{\Sigma} z \, d\sigma = -12 \int_{\Sigma} d\sigma = -12 \operatorname{area}(\Sigma) = -12\pi,$$

dove si è usato il fatto che  $z = 3$  in ogni punto di  $\Sigma$  e che  $\operatorname{area}(\Sigma) = \pi$ , essendo  $\Sigma$  un cerchio di raggio 1.

**ESERCIZIO.** Calcolare la circuitazione del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$  lungo il bordo della calotta triangolare  $T \subset \mathbb{R}^3$  di vertici  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 1)$  e  $C = (0, 0, 1)$ , orientato nel verso secondo cui  $C$  segue  $A$  e precede  $B$ .

**Svolgimento.** Si deve calcolare

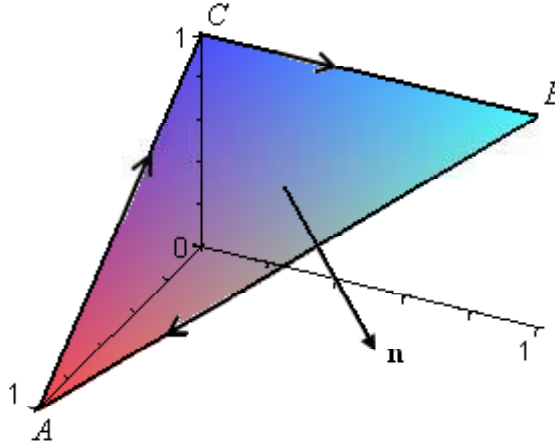
$$L_{\Gamma(T)}(\mathbf{F}) = \oint_{\Gamma(T)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP \quad (1.1)$$

dove l'arco regolare a tratti chiuso  $\Gamma(T)$  è orientato come nel testo (e in figura).

Controllato che  $\mathbf{F}$  non è conservativo in alcun aperto contenente  $\Gamma(T)$ , in quanto  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z - y & x - z & y - x \end{vmatrix} = (2, 2, 2) \neq \mathbf{0}, \quad (1.2)$$

non si può applicare il teorema di equivalenza per dedurre che il lavoro (1.1) è nullo, per cui si deve procedere per altra via.



Possiamo allora procedere in due modi:

- 1) ricorrendo al teorema di Stokes (che pare di agevole applicazione in quanto  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = (2, 2, 2)$  è costante e  $T$  è un insieme piano, per cui saranno costanti anche i versori normali a  $T$ ) e determinando quindi  $L_{\Gamma(T)}(\mathbf{F})$  tramite il calcolo del flusso di  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  attraverso il triangolo  $T$  (orientato coerentemente con il verso stabilito su  $\Gamma(T)$ );
- 2) procurandosi una parametrizzazione (regolare) per ciascuno dei tre segmenti che compongono  $\Gamma(T)$  e calcolando l'integrale di linea (1.1) direttamente.

Vediamo entrambi i procedimenti.

**1** **Tramite teorema di Stokes.** Applicando il teorema di Stokes, si ha

$$L_{\Gamma(T)}(\mathbf{F}) = \int_T \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma$$

dove, nell'integrale di superficie a secondo membro,  $\mathbf{n}(x, y, z)$  è il versore normale al triangolo  $T$  nel suo punto di coordinate  $(x, y, z)$ , *orientato coerentemente con la percorrenza stabilita su  $\Gamma(T)$* , ossia in modo che, percorrendo  $\Gamma(T)$  nel verso stabilito, un osservatore disposto su  $T$  come  $\mathbf{n}$  lasci  $T$  alla sua sinistra.

Il calcolo in (1.2) mostra che

$$\forall (x, y, z) \in T, \quad \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (2, 2, 2).$$

D'altra parte, poiché  $T$  giace sul piano  $x + z - 1 = 0$  (ottenuto ad esempio come piano parallelo ad  $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$  e  $\overrightarrow{CB} = (0, 1, 0)$  e passante per  $A$ ), il versore  $\mathbf{n}(x, y, z)$  è costante su  $T$  e coincide con uno dei due versori normali a tale piano, che sono  $\pm \frac{(1, 0, 1)}{\|(1, 0, 1)\|} = \pm \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ . Tenendo conto del fatto che l'orientamento dato da  $\mathbf{n}$  deve essere coerente con quello stabilito su  $\Gamma(T)$ , si ottiene

$$\forall (x, y, z) \in T, \quad \mathbf{n}(x, y, z) = - \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

(come rappresentato in figura).

Dunque

$$\begin{aligned} L_{\Gamma(T)} &= \int_T \text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) d\sigma = - \int_T (2, 2, 2) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) d\sigma = - \int_T 2\sqrt{2} d\sigma \\ &= -2\sqrt{2} \int_T d\sigma = -2\sqrt{2} \text{area}(T) = -2, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che  $T$  è rettangolo in  $C$  (essendo  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ) per calcolare elementarmente  $\text{area}(T) = \|\overrightarrow{AC}\| \|\overrightarrow{CB}\|/2 = \sqrt{2}/2$ .

**2** **Calcolo diretto.** Denotando con  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ , rispettivamente, i segmenti  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$  orientati concordemente con il verso di percorrenza stabilito su  $\Gamma(T)$  (cioè secondo il verso dei vettori  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BA}$ ), si ha  $\Gamma(T) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  e

$$\oint_{\Gamma(T)} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP. \quad (1.3)$$

Per eseguire il calcolo diretto dei tre integrali a secondo membro, serve una rappresentazione parametrica per ciascuno dei segmenti  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ .

Siccome  $\Gamma_1$  giace sulla retta  $r_1$  parallela ad  $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$  e passante per  $A$ , che ha equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si ha subito che  $\Gamma_1 = \gamma_1([0, 1])$  con  $\gamma_1(t) = (1 - t, 0, t)$ . Inoltre la parametrizzazione  $\gamma_1$  è concorde con il verso di percorrenza prestabilito su  $\Gamma_1$ , in quanto abbiamo parametrizzato  $r_1$  con vettore direttore  $\overrightarrow{AC}$  (alternativamente, si può osservare che  $\gamma_1(0) = A$  e  $\gamma_1(1) = C$ , per cui al crescere del parametro  $t$  il punto  $\gamma_1(t)$  si muove su  $\Gamma_1$  da  $A$  a  $C$ ). Dunque

$$\int_{\Gamma_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP = + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt = \int_0^1 (t, 1 - 2t, -1 + t) \cdot (-1, 0, 1) dt = \int_0^1 (-1) dt = -1.$$

Analogamente si ottengono le parametrizzazioni

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad \gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in [0, 1],$$

di  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$ , ambedue concordi con i versi di percorrenza fissati, che forniscono

$$\int_{\Gamma_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP = + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt = \int_0^1 (1-t, -1, t) \cdot (0, 1, 0) dt = \int_0^1 (-1) dt = -1$$

e

$$\int_{\Gamma_3} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP = + \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt = \int_0^1 (0, 2t-1, 1-2t) \cdot (1, -1, -1) dt = 0.$$

Sostituendo nella (1.3), si conclude allora

$$L_{\Gamma(T)}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_i} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot dP = -2.$$

**ESERCIZIO.** Calcolare il flusso del campo  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + 3z, 2zx, \log x)$  uscente dalla frontiera dell'insieme

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, -y - \frac{1}{2} \leq z \leq y + \frac{1}{2}, x \geq 0 \right\}.$$

**Svolgimento.** L'insieme  $A$  è la chiusura di un dominio di Green di  $\mathbb{R}^3$  ed  $\mathbf{F} \in C^1(A)$  (essendo  $\mathbf{F}$  di classe  $C^\infty$  su  $\text{dom } \mathbf{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > -1\}$  ed essendo  $A \subset \text{dom } \mathbf{F}$ ), dunque il teorema della divergenza assicura che il flusso uscente cercato è dato da

$$\Phi_{\partial A, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = + \int_A \text{div } \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = \int_A 2x dx dy dz$$

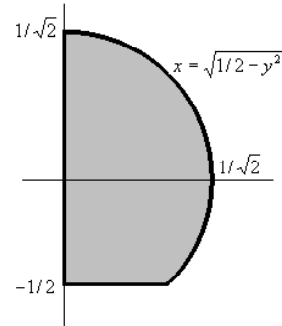
(essendo  $\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = 2x + 0 + 0$ ).

Per calcolare l'integrale triplo a secondo membro, osserviamo che  $A$  è  $z$ -semplice, in quanto può essere riscritto come

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, -y - \frac{1}{2} \leq z \leq y + \frac{1}{2} \right\}$$

dove  $D$  è individuato dalle disequazioni imposte su  $(x, y)$  dalla definizione di  $A$ , ossia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \\ -y - \frac{1}{2} \leq y + \frac{1}{2} \\ x \geq 0, \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2} \\ y \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq 0. \end{cases}$$



Allora

$$\int_A 2x \, dx \, dy \, dz = \int_D \left( \int_{-y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} 2x \, dz \right) dx \, dy = \int_D 2x \left( \int_{-y-\frac{1}{2}}^{y+\frac{1}{2}} dz \right) dx \, dy = \int_D 2x(2y+1) \, dx \, dy,$$

dove, integrando per orizzontali, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_D 2x(2y+1) \, dx \, dy &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_0^{\sqrt{1/2-y^2}} 2x(2y+1) \, dx \right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2y+1) [x^2]_{x=0}^{x=\sqrt{1/2-y^2}} dy \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2y+1) \left( \frac{1}{2} - y^2 \right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \frac{1}{2} + y - y^2 - 2y^3 \right) dy \\ &= \left[ \frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{2} \right]_{y=-\frac{1}{2}}^{y=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{23}{96} + \frac{1}{6}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dunque

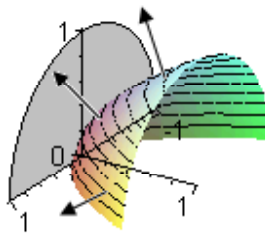
$$\Phi_{\partial A, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = \frac{23}{96} + \frac{1}{6}\sqrt{2}.$$

**ESERCIZIO.** Sia  $\Sigma$  la porzione di paraboloido  $y = x^2 + z^2$  che si proietta sul piano  $y = 0$  nel semicerchio  $x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ . Tramite il teorema di Gauss, calcolare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$  attraverso  $\Sigma$ , orientata in modo che il suo versore normale formi in ogni punto angolo ottuso con il versore  $\mathbf{j}$  dell'asse  $y$ .

**Svolgimento.** Si chiede che per ogni  $P = (x, y, z) \in \Sigma$  le coordinate  $x, z$  del punto proiezione  $(x, 0, z)$  di  $P$  sul piano  $y = 0$  soddisfino  $x^2 + z^2 \leq 1$  e  $z \geq 0$ . Dunque

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, y \leq 1, z \geq 0\},$$

ossia  $\Sigma$  è la parte del paraboloido  $y = x^2 + z^2$  (di rotazione, con vertice nell'origine e asse sull'asse  $y$ ) che giace nell'intersezione dei semispazi  $y \leq 1$  e  $z \geq 0$ .



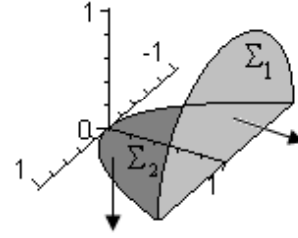
In figura sono rappresentati anche alcuni dei versori normali a  $\Sigma$ , concordi con l'orientamento stabilito, nonché la proiezione di  $\Sigma$  sul piano  $y = 0$ , che individua l'insieme piano

$$K = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}.$$

Per calcolare il flusso  $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F})$  del campo  $\mathbf{F}$  attraverso  $\Sigma$ , il teorema di Gauss non può essere applicato direttamente, in quanto  $\Sigma$  non è una calotta chiusa (frontiera di un dominio di Green). Occorre allora

“chiudere”  $\Sigma$ , unendovi le due calotte

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1, x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1, (x, z) \in K\}, \\ \Sigma_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 \leq y \leq 1\},\end{aligned}$$



per ottenere una calotta regolare a pezzi  $\Sigma_0 = \Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  chiusa (e orientabile). Compatibilmente con l'orientamento stabilito su  $\Sigma$ , le calotte  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  vanno orientate secondo il verso di attraversamento uscente dall'interno  $\Omega$  di  $\Sigma_0$  (come si vede bene dalle figure riportate). Ora, essendo  $\Omega$  un dominio di Green e  $\Sigma_0$  la sua frontiera, il flusso  $\Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F})$  di  $\mathbf{F}$  uscente da  $\Sigma_0$  può essere calcolato tramite il teorema di Gauss e, d'altra parte, si avrà  $\Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = \Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) + \Phi_{\Sigma_1, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) + \Phi_{\Sigma_2, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F})$ , cioè

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) - \Phi_{\Sigma_1, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) - \Phi_{\Sigma_2, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}). \quad (1.4)$$

Per ottenere il flusso  $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F})$  richiesto, si tratta dunque di calcolare  $\Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F})$  tramite il teorema di Gauss e  $\Phi_{\Sigma_1, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F})$  e  $\Phi_{\Sigma_2, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F})$  direttamente (il che risulterà piuttosto semplice in quanto  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sono superfici piane, ossia con vettore normale costante).

- Poichè  $\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = z^2 + x^2$ , per il teorema di Gauss si ha

$$\Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dx dy dz$$

(si noti che il flusso a primo membro è *uscende*, da cui il segno + davanti al primo integrale). L'insieme  $\Omega$  è costituito dai punti del paraboloide pieno  $x^2 + z^2 \leq y$  che giacciono nell'intersezione dei semispazi  $y \leq 1$  e  $z \geq 0$  ed ammette la rappresentazione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in K, x^2 + z^2 \leq y \leq 1\},$$

la quale mette in evidenza la sua  $y$ -semplicità. Integrando per fili paralleli all'asse  $y$  ed esprimendo poi  $K \setminus \{(0, 0)\} = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$  in coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dx dy dz &= \int_K \left( \int_{x^2+z^2}^1 (x^2 + z^2) \, dy \right) dx dz = \int_K (x^2 + z^2) \left( \int_{x^2+z^2}^1 dy \right) dx dz \\ &= \int_K (x^2 + z^2) [1 - (x^2 + z^2)] \, dx dz = \int_K [(x^2 + z^2) - (x^2 + z^2)^2] \, dx dz \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^1 (\rho^2 - \rho^4) \rho \, d\rho d\theta = \left( \int_0^{\pi} d\theta \right) \left( \int_0^1 (\rho^3 - \rho^5) \, d\rho \right) = \pi \left[ \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

Dunque

$$\Phi_{\Sigma_0, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = \frac{\pi}{12}. \quad (1.5)$$

- Per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma_1$  si ha  $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2, xz, x^2z)$  ed  $\mathbf{n}_e(x, y, z) = \mathbf{j}$  costante (si ricordi che

$\mathbf{n}_e$  è il versore normale a  $\Sigma_1$  orientato secondo il verso uscente da  $\Omega$ , come in figura), da cui

$$\Phi_{\Sigma_1, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = \int_{\Sigma_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_e(x, y, z) d\sigma = \int_{\Sigma_1} (xz^2, xz, x^2z) \cdot (0, 1, 0) d\sigma = \int_{\Sigma_1} xz d\sigma.$$

Una parametrizzazione (regolare) di  $\Sigma_1$  è evidentemente data da

$$\sigma_1 : \begin{cases} x = x \\ y = 1 \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } (x, z) \in K.$$

Poiché  $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$ ,  $\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = (0, 0, 1) = \mathbf{k}$  ed  $\mathbf{N}_{\sigma_1} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$  per ogni  $(x, z) \in K$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} xz d\sigma &= \int_K xz \|\mathbf{N}_{\sigma_1}(x, z)\| dudv = \int_K xz dudv = \int_0^\pi \int_0^1 \rho^3 \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta \\ &= \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left( \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta \right) = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{8} \left[ -\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^\pi = 0, \end{aligned}$$

dove si è naturalmente passati a coordinate polari per calcolare l'integrale esteso a  $K$ . Dunque

$$\Phi_{\Sigma_1, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = 0. \quad (1.6)$$

- Per ogni  $(x, y, z) \in \Sigma_2$  si ha  $z = 0$  e quindi  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, 0) = (0, 0, 0)$ , da cui segue immediatamente

$$\Phi_{\Sigma_2, \mathbf{n}_e}(\mathbf{F}) = 0. \quad (1.7)$$

Grazie alle (1.4), (1.5), (1.6) e (1.7), si conclude finalmente che

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \frac{\pi}{12}.$$

**Osservazione.** L'artificio di chiudere una calotta non chiusa per applicare il teorema di Gauss è spesso utile di fronte a flussi che non sono facilmente calcolabili direttamente. Nel caso dell'esercizio, comunque, il flusso  $\Phi_\Sigma(\mathbf{F})$  richiesto si sarebbe potuto calcolare direttamente senza eccessive difficoltà. Infatti, poiché  $\Sigma$  è il grafico  $y = f(x, z)$  della funzione  $f(x, z) = x^2 + z^2$  sull'insieme  $K$ , essa ammette la parametrizzazione (regolare) standard

$$\sigma : \begin{cases} x = x \\ y = x^2 + z^2 \\ z = z \end{cases} \quad \text{con } (x, z) \in K.$$

Essendo  $\sigma_x = (1, 2x, 0)$  e  $\sigma_z = (0, 2z, 1)$ , il vettore normale  $\mathbf{N}_\sigma$  relativo a  $\sigma$  è dato da

$$\mathbf{N}_\sigma(x, z) = \sigma_x(x, z) \wedge \sigma_z(x, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = (2x, -1, 2z)$$

e forma in ogni punto angolo ottuso con  $\mathbf{j}$ , in quanto  $\mathbf{N}_\sigma(x, z) \cdot \mathbf{j} = -1 < 0$  per ogni  $(x, z) \in K$ . Dunque

la parametrizzazione  $\sigma$  induce su  $\Sigma$  l'orientamento richiesto e si ottiene allora

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) &= + \int_K \mathbf{F}(\sigma(x, z)) \cdot \mathbf{N}_{\sigma}(x, z) \, dx dz = \int_K \mathbf{F}(x, x^2 + z^2, z) \cdot \mathbf{N}_{\sigma}(x, z) \, dx dz \\
 &= \int_K (xz^2, xz, x^2 z) \cdot (2x, -1, 2z) \, dx dz = \int_K (4x^2 z^2 - xz) \, dx dz \\
 &= \int_{[0,1] \times [0,\pi]} (4\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - \rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho \, d\rho d\theta \\
 &= 4 \int_{[0,1] \times [0,\pi]} \rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\rho d\theta - \int_{[0,1] \times [0,\pi]} \rho^3 \cos \theta \sin \theta \, d\rho d\theta \\
 &= 4 \left( \int_0^1 \rho^5 d\rho \right) \left( \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \, d\theta \right) - \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left( \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \left( \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \sin^2(2\theta) d\theta - \frac{1}{8} \int_0^{\pi} \sin(2\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(4\theta)}{2} d\theta - \frac{1}{8} \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{12} \left( \pi - \int_0^{\pi} \cos(4\theta) d\theta \right) = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{12} \left[ \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{\pi}{12},
 \end{aligned}$$

dove facciamo notare che si è usata l'identità  $\sin^2(2\theta) = (1 - \cos(4\theta))/2$ .

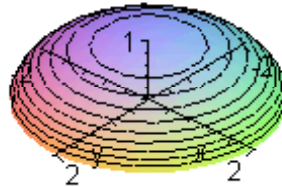
**ESERCIZIO.** Usando il teorema della divergenza, calcolare il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definito da  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2zy, -1)$  attraverso la porzione di ellissoide

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

orientata secondo il verso che si allontana dall'origine.

**Svolgimento.** La superficie

$$\Sigma : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$



è la parte dell'ellissoide  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$  contenuta nel semispazio  $z \geq 0$  e non costituisce la frontiera di un aperto a cui poter applicare il teorema della divergenza. Ricorriamo allora all'artificio di "chiudere la superficie  $\Sigma$ " aggiungendovi il cerchio di base

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{4} \leq 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Così facendo, la superficie  $\Sigma \cup \Sigma_1$  è la frontiera dell'aperto

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{4} + z^2 < 1, z > 0 \right\}$$

ed il teorema della divergenza consente di calcolare il flusso  $\Phi_{\Sigma \cup \Sigma_1}(\mathbf{F})$  di  $\mathbf{F}$  uscente da  $\Sigma \cup \Sigma_1 = \partial\Omega$  tramite l'uguaglianza

$$\Phi_{\Sigma \cup \Sigma_1}(\mathbf{F}) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz.$$

Poiché si ha

$$\Phi_{\Sigma \cup \Sigma_1}(\mathbf{F}) = \Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) + \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$$

dove  $\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F})$  è il flusso richiesto dal testo e  $\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$  è il flusso di  $\mathbf{F}$  attraverso  $\Sigma_1$  orientata compatibilmente con  $\Sigma$  (cioè “verso il basso”), risulta

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \Phi_{\Sigma \cup \Sigma_1}(\mathbf{F}) - \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F}) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz - \Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F})$$

e si tratta quindi di calcolare i due termini a secondo membro.

- Si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 2z$$

e quindi

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx dy dz = \int_{\Omega} (1 + 2z) \, dx dy dz.$$

Poiché le sezioni orizzontali di  $\Omega$  sono cerchi, conviene integrare per fette (ma anche per fili il calcolo non risulta troppo difficile); dunque, osservato che la proiezione di  $\Omega$  sull'asse  $z$  è l'intervallo  $[0, 1]$  (i semiassi dell'ellissoide sono 2, 2, 1), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (1 + 2z) \, dx dy dz &= \int_0^1 \left( \int_{x^2 + y^2 \leq 4 - 4z^2} (1 + 2z) \, dx dy \right) dz = \int_0^1 (1 + 2z) \left( \int_{x^2 + y^2 \leq 4(1 - z^2)} dx dy \right) dz \\ &= \int_0^1 (1 + 2z) \pi 4 (1 - z^2) \, dz = 4\pi \int_0^1 (1 + 2z - z^2 - 2z^3) \, dz \\ &= 4\pi \left[ z + z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{2} \right]_0^1 = \frac{14}{3}\pi. \end{aligned}$$

- Poiché il versore  $\mathbf{n}$  normale a  $\Sigma_1$  ed orientato “verso il basso” è  $\mathbf{n} = -\mathbf{k} = (0, 0, -1)$  (costante in tutti i punti di  $\Sigma_1$ ), risulta  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (x, 2zy, -1) \cdot (0, 0, -1) = 1$  in tutti i punti di  $\Sigma_1$  e perciò si ottiene

$$\Phi_{\Sigma_1}(\mathbf{F}) = \int_{\Sigma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} d\sigma = \operatorname{area}(\Sigma_1) = 4\pi$$

( $\Sigma_1$  è il cerchio del piano  $xy$  di centro l'origine e raggio 2).

In definitiva risulta

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{F}) = \frac{14}{3}\pi - 4\pi = \frac{2}{3}\pi.$$